

Sondervick College te Veldhoven

VERSIE 2007

Oefeningen

Combinatoriek en kansrekening

door M.Laarhoven

Voor VWO 5 en VWO 6

Voor wiskunde A1 - A1,2 - B1 en B1,2

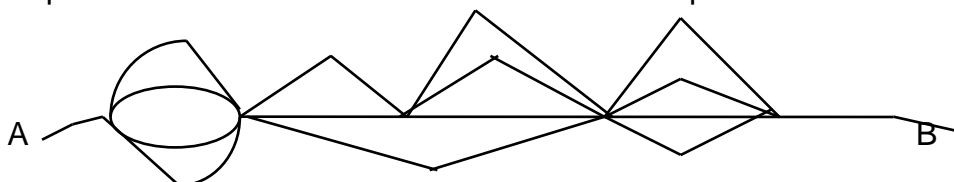
** Niet voor wiskunde A1

*** Niet voor wiskunde A1 en A1,2

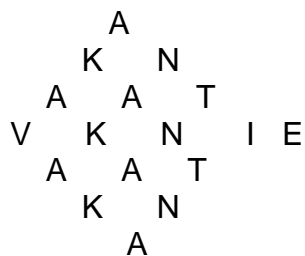
**** Niet voor wiskunde A1, A1,2 en B1

1. Iemand heeft thuis 12 CD's in een rekje waar er precies 12 inpassen.
 - a. Op hoeveel manieren kan hij ze in het rekje leggen.
 - b. Hij wil er 2 weggeven aan zijn vriendin, hoeveel mogelijkheden?
 - c. Hij wil een top 4 voor zichzelf maken. Hoeveel mogelijkheden?
2. In een rooster kun je steeds een stap naar rechts of naar boven doen.
 - a. Hoeveel mogelijkheden zijn er om van (0,0) naar (3,4) te lopen
 - b. En van (2,3) naar (9,3)?
 - c. En van (3,4) naar (12,6)?
 - d. Op hoeveel manieren van (0,0) naar (5,6) via (2,3)?
3. In een klas zitten 12 jongens en 10 meisjes. De docent wil een groepje van 3 leerlingen aanwijzen om na afloop de klas op te ruimen.
 - a. Op hoeveel manieren kan hij 3 meisjes kiezen?
 - b. Op hoeveel manieren kan hij 2 jongens en 1 meisjes kiezen?
 - c. Op hoeveel manieren kan hij 3 leerlingen kiezen?
4.
 - a. Hoeveel verschillende rijtjes van 6 cijfers kun je maken met twee nullen en vier enen ?
 - b. En als die rijtjes moeten beginnen met een 1 ?
 - c. En als de nullen niet naast elkaar mogen staan ?
5. 3 gelijke figuurtjes, 2 verschillende letters en 4 gelijke symbolen moeten op een rijtje worden gezet. Op hoeveel manieren kan dat als de 4 symbolen vooraan moeten staan ?
6. Op tafel liggen 10 verschillende boeken. Op hoeveel verschillende manieren kunnen 3 jongens daar ieder 1 boek uit kiezen ?
7. 5 mensen gaan aan een ronde tafel zitten. We beschouwen de oplossing ABCDE en BCDEA als dezelfde. ABCDE en EDCBA zijn wel verschillend.
 - a. Op hoeveel manieren kan dat dan ?
 - b. En als de plaats waar A moet zitten steeds dezelfde is ?
8. Een vereniging met 20 leden moet een bestuur van 4 verschillende functies kiezen. Op hoeveel manieren kan dat ?
9. Op hoeveel manieren kun je een toto invullen (13 uitslagen) zodat er 4 goed zijn en 9 fout ? Bij iedere uitslag 3 mogelijkheden waarvan er 1 goed is en 2 fout.
 - a. Op hoeveel manieren kan dat dan ?
 - b. En als de plaats waar A moet zitten steeds dezelfde is ?
10. In een klas zitten 10 jongens en 20 meisjes. Op hoeveel manieren kun je hieruit een groepje van 3 meisjes en 2 jongens selecteren ?
11. Beschouw het resultaat van een proefwerk in een klas met 20 leerlingen. De cijfers lopen van 0 t/m 10, alleen gehele cijfers.
 - a. Hoeveel verschillende resultaten zijn er mogelijk ?
 - b. En hoeveel manieren als je weet dat precies 6 leerlingen een cijfer halen 5 of lager ?

- 12 Op tafel liggen 10 rode rozen, 5 blauwe korenbloemen en 7 gele paardebloemen. Op hoeveel manieren kan men daarvan een boeket maken met 3 rozen, 4 paardebloemen en 2 korenbloemen ?
- 13 Er wordt een voetbalwedstrijd gespeeld. Alle uitslagen van 0-0 tot/met 10-10 zijn mogelijk. Hoeveel mogelijke uitslagen zijn er als je weet dat de thuisclub heeft gewonnen ?
- 14 Op hoeveel manieren kan men van A naar B lopen ?



- 15 Iemand moet een M.C. werk maken met 10 vragen. Op elke vraag zijn 4 antwoorden mogelijk waarvan er 1 goed is. Op hoeveel verschillende manieren kan hij het werk invullen opdat hij 7 antwoorden goed en 3 antwoorden fout heeft ?
- 16 Jan heeft 3 overhemden, 4 broeken en 2 paar sokken. Hoeveel verschillende combinaties zijn er mogelijk ?
- 17 Op een schaakclub zijn 60 leden. Hoeveel wedstrijden moeten er totaal worden gespeeld opdat ieder tegen ieder precies 1 keer heeft gespeeld ?
- 18 Op hoeveel verschillende manieren kan men hier van links naar rechts het woord vakantie lezen ?



- 19 a. Op hoeveel verschillende manieren kun je een groepje van 8 personen verdelen in twee groepjes van 4 ?
b. En in twee groepjes, een van 2 en een van 6 ?
- 20 Ik heb 10 verschillende planten maar op mijn bureau kunnen er maar 3 op Een rijtje staan. Op hoeveel manieren kan ik mijn bureau versieren ?
- 21 Hoeveel wegen lopen er van de oorsprong (0,0) naar het punt A(4,7) als je steeds maar 1 eenheid naar rechts of naar boven mag, je dus over de roosterlijnen moet gaan. ?

- 22 Men gooit tegelijk 3 dobbelstenen op tafel.
 a. Hoeveel verschillende worpen zijn er mogelijk ?
 b. In hoeveel van die worpen is de som van de ogen hoogstens 5 ?
- 23 a. Hoeveel verschillende permutaties zijn er mogelijk met de letters van het woord "broek" ?
 b. En met het woord "veel" ?
- 24 Hoeveel morseseuinen van 5 tekens kun je vormen met 3 strepen en 2 punten ?
- 25 Los op: $\frac{66}{(n+2)!} + \frac{18}{(n+1)!} = \frac{1}{n!}$

- 26 Hoeveel getallen zijn er kleiner dan 1000 waarin geen cijfer 2 maal voorkomt ?

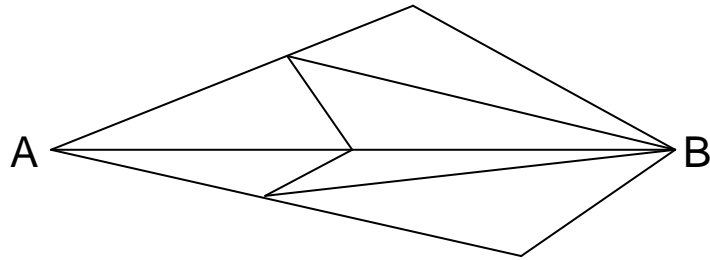
- 27 Hoeveel verschillende deelverzamelingen met 3 elementen heeft een verzameling van 5 elementen ?
- 28 Schrijf uit: $(x - 1)^7 =$

- 29 Bewijs dat $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

- 30 Hoeveel verschillende spoorkaartjes 2^e klas enkele reis moet een spoorweg met 50 stations laten drukken ?
- 31 Op een lottoformulier moet je 6 cijfers aankruisen van de 41. Op hoeveel verschillende manieren kun je dat doen opdat je er 5 goed hebt en 1 fout ?
 **
- 32 Van een kubus wil ik twee vlakken rood en 4 vlakken blauw verven. Hoeveel echt verschillende kubussen kan ik krijgen ?
- 33 Schrijf uit: $(a^2 - 1)^5 =$

- 34 Jan staat 2 passen van een afgrond verwijderd. Bij de tweede pas valt hij 3000 meter omlaag. Hij kan steeds een pas voor of achteruit doen. Geef in een boomdiagram weer wat er allemaal kan gebeuren als Jan 4 passen doet .

35. Op hoeveel verschillende manieren kun je van A naar B lopen, je mag niet Teruglopen, dus steeds van links naar rechts ?



36. Op hoeveel manieren kan men 4 flesjes bier (2 heineken, 1 bavaria en 1 amstel) op een rijtje zetten ? (2 heiniken zijn hetzelfde)
37. In het tweetallig stelsel gebruikt men de tekens 0 en 1. Hoeveel verschillende getallen van 10 tekens achterelkaar kan men hiermee maken, een getal mag ook met 0 beginnen.
38. Hoeveel permutaties kan men maken van het woord "einde" ?
39. Op hoeveel manieren kan hieronder het woord koningshof gelezen worden ?

```

      k
     o o
    n n n
   i i i i
  n n n n n
 g g g g g g
s s s s s s
h h h h h h
 o o o o
  f f

```

40. In een winkel worden 6 verschillende merken tandenborstels verkocht. Zes klanten kopen onafhankelijk van elkaar een tandenborstel. Hoeveel mogelijkheden zijn er dat ze allemaal een andere tandenborstel kopen ?
41. Op hoeveel manieren kunnen de letters van het woord "marktkraam" worden gerangschikt ?
42. Het dominospel bevat stenen met op elke helft 1 van de getallen 0 t/m 7. Elke steen komt 1 keer voor (hieronder twee gelijke stenen). Hoeveel stenen heeft dit spel ?



- 43 ****** Bepaal de coëfficiënt van $x^4 y^5$ in de uitwerking van $(x + y)^9$.
44. In een klas zitten 14 jongens en 16 meisjes. Op hoeveel manieren kun je hieruit een groepje van 3 meisjes en 2 jongens selecteren ?
45. Beschouw het resultaat van een proefwerk in een klas met 19 leerlingen. De cijfers lopen van 1 t/m 10, alleen gehele cijfers.
- Hoeveel verschillende resultaten zijn er mogelijk ?
 - En hoeveel manieren als je weet dat precies 6 leerlingen een cijfer halen 5 of lager ?
- 46 Op tafel liggen 10 rode rozen, 6 blauwe korenbloemen en 7 gele paardebloemen. Op hoeveel manieren kan men daarvan een boeket maken met 4 rozen, 2 paardebloemen en 3 korenbloemen ?
- 47 Er wordt een voetbalwedstrijd gespeeld. Alle uitslagen van 0-0 tot/met 8-8 zijn mogelijk. Hoeveel mogelijke uitslagen zijn er als je weet dat de thuisclub heeft gewonnen of gelijkgespeeld ?
- 48 Iemand moet een M.C. werk maken met 12 vragen. Op elke vraag zijn 5 antwoorden mogelijk waarvan er 1 goed is. Op hoeveel verschillende manieren kan hij het werk invullen opdat hij 8 antwoorden goed en 4 antwoorden fout heeft ?
- 49
- Op hoeveel verschillende manieren kun je een groepje van 10 verdelen in twee groepjes van 5 ?
 - En in twee groepjes, een van 6 en een van 4 ?
- 50 ******* Hoeveel getallen zijn er kleiner dan 10000 waarin geen cijfer 2 maal voorkomt ?
- 51 Op een lottoformulier moet je 6 cijfers aankruisen van de 41. Op hoeveel verschillende manieren kun je dat doen opdat je er 5 goed hebt en 1 fout ?
- 52 Op hoeveel manieren kan hieronder het woord koningin gelezen worden ?

```

          g
         n i
        i g n
       n n i
      o i g
     k n n
    o i g
     n n i
      i g n
       n i
        g

```

- 53 Op hoeveel verschillende manieren kun je in rooster van (3,2) naar (9,5) lopen, weer alleen stap naar rechts of naar boven.
- 54 Iemand heeft in de kast 3 broeken, 4 truien, 6 paar sokken en 2 paar schoenen. Hoeveel verschillende "combinaties" zijn mogelijk?
- 55 A en B spelen een tenniswedstrijd tegen elkaar om 3 gewonnen sets. Op hoeveel verschillende manieren kan de wedstrijd afgelopen zijn in 3 sets? En in 4 sets? En in 5 sets?
- 56 Op hoeveel manieren kunnen de letters van het woord "marktkraam" worden gerangschikt ?
57. Op een schaakvereniging doen 40 personen mee aan de interne competitie. Ieder speelt tegen ieder een keer met wit en een keer met zwart. Hoeveel wedstrijden moeten er totaal gespeeld worden?
- 58 Op een tennisclub wordt een toernooi gespeeld, er zijn 24 deelnemers. Als ieder een keer tegen iedereen moet spelen, hoeveel wedstrijden moeten dan worden gespeeld?
- 59 Ze besluiten willekeurige koppels te maken en een dubbeltoernooi te spelen. Hoeveel mogelijkheden zijn er om de 24 leden in 12 koppels te verdelen?
60. Laurens gooit met 5 dobbelstenen. Duncan telt het aantal ogen. Hoeveel mogelijkheden zijn er waarbij de som van de ogen ≤ 6 ?
61. In een vaas zitten 3 rode, 5 blauwe en 2 gele knikkers. Chantal trekt aselekt 3 knikkers tegelijk uit deze vaas. Hoeveel mogelijkheden zijn er waarbij ze 2 blauwe en 1 gele knikker trekt?
62. Hoeveel verschillende "woorden" kun je maken met de letters van: het woord "peter" ?_
63. Juliet vult een toto (13 uitslagen, steeds keus uit 3) aselekt in. Op hoeveel manieren kan ze dat doen waarbij ze er precies 11 goed heeft?
64. Een klas met 30 leerlingen moet worden opgedeeld in 3 groepen, een groep van 11, een groep van 7 en een groep van 12. Op hoeveel manieren kan dat?
- 65.. Nicole maakt "morse-seinen" bestaande uit 3 strepen en 2 punten. Op hoeveel manieren kan dat?
66. Gijs gooit met 100 zuiver muntstukken, (Kop of Kruis). Hoeveel mogelijkheden zijn er waarbij er 30 keer een kruis en 70 keer een munt boven ligt?

67. In een vaas zitten n knikkers, k gele en de rest blauwe. Hugo trekt aselect 3 knikkers uit deze vaas. Er geldt: $n > 3$ en $k > 3$ en $k < n$. Druk de volgende kans uit in k en n . $P(2 \text{ blauwe en } 1 \text{ gele}) = \underline{\hspace{2cm}}$

68. Het dominospel bevat stenen met op elke helft 1 van de getallen 0 t/m 7. Elke steen komt 1 keer voor. Hoeveel stenen heeft dit spel ?
69. Dirk-Jan brengt bijzondere dobbelstenen mee naar school: op de zijvlakken staan de getallen 1,1,3,5,6,6 Marielle gooit tegelijk met 2 van deze dobbelstenen. Anke telt het aantal ogen.
*
 $P(\text{totaal } 7 \text{ ogen}) =$
 $P(\text{er valt minstens } 1 \text{ zes}) =$
70. Joost organiseert een loterij. Hij maakt 12 loten. Op elk lot valt hoogstens 1 prijs. Er is 1 prijs van 40 gulden, er zijn twee prijzen van 20 gulden en 3 prijzen van 10 gulden. Mark koopt 2 loten en Stan koopt 3 loten.
**
 $P(\text{Mark wint } 40 \text{ gulden}) = \underline{\hspace{1cm}}$ $P(\text{Stan wint } 40 \text{ gulden}) = \underline{\hspace{1cm}}$
71. Danielle doet mee met de lotto, ze vult 1 kolom in.
 $P(\text{Danielle heeft er } 2 \text{ goed van de } 6) = \underline{\hspace{2cm}}$
72. Bennie maakt nummerborden van de vorm AB-CD-24 Alle letters mogen worden gebruikt maar iedere letter mag ten hoogste 1 keer voorkomen. Alle cijfers zijn toegestaan, ook dubbel. Stel dat Bennie in staat is alle borden te maken die mogelijk zijn, dan maakt hij $\underline{\hspace{1cm}}$ verschillende borden.
73. Katja trekt aselect 3 kaarten tegelijk uit een spel met 52 kaarten. Op hoeveel manieren kan ze 2 ruiten en 1 andere pakken. _
74. Als je $(a+b).(a+b)$ moet uitrekenen moet je steeds van beide er eentje nemen en dan vermenigvuldigen. Kies je twee keer een a dan krijg je a^2 , kies je een a en een b , dat kan dan op 2 manieren (ab of ba) dus je krijgt $2ab$ en tenslotte kies je twee keer de b dan krijg je b^2 . Op dezelfde manier kun je $(a+b).(a+b).(a+b)$ uitrekenen: 1 keer a^3 , twee a 'tjes en een b kan op 3 manieren dus $3a^2b$ etc etc.
*
Bereken: $(a+b).(a+b).(a+b) =$ $(a+b)^4 =$ en $(a+b)^5 =$
75. In een klas zitten 22 leerlingen. 10 leerlingen voetballen, 8 leerlingen tafeltennissen, 11 leerlingen tennissen, 5 leerlingen voetballen en tennissen, 3 leerlingen voetballen en tafeltennissen en 3 leerlingen tennissen en tafeltennissen.
a. Hoeveel leerlingen tafeltennissen niet ?
b. Hoeveel leerlingen voetballen en tennissen wel maar tafeltennissen niet ?

- 76 Op een plankje staan 10 lampjes die allemaal aan of uit kunnen zijn.
 ** Hoeveel mogelijkheden zijn er opdat er minimaal 2 lampjes aan zijn ?
- 77 Werk verder uit: $(x+1)^5 =$

- 78 A en B spelen tegen elkaar 10 spelletjes. Ieder spelletje kan gewonnen worden
 *** door A of door B of het wordt remise.
 Op hoeveel verschillende manieren kan de stand na 10 spelletjes gelijk eindigen?
79. Jeroen maakt allerlei woorden met de letters van het woord "einde".
 Hoeveel verschillende "woorden" kan hij maken.

E I N D E

Handleiding:

1. bij alle telproblemen gewoon blijven nadenken, sommige zijn heel eenvoudig, gebruik je verstand en niet alleen je geheugen
2. Gebruik altijd kladpapier, teken.
3. Als je het moeilijk vindt schrijf een aantal mogelijkheden op, dan zie je vaak wel de regelmaat, het systeem.
4. Maak gebruik van de hulpmiddelen:
 - a. Bij meerdere elementen gebruik boomdiagrammen
 - b. Bij 2 kaarten/dobbelstenen/.. zet horizontaal en vertikaal af
 - c. Bij overlappingen gebruik soms Venn-diagrammen
5. Maak gebruik van je (noodzakelijke) kennis over:
 - a. Permutaties
 Het aantal permutaties (volgordes) bij 5 verschillende elementen is $5!$, spreek uit "5 faculteit", rekenapp.: math-prb- !
 - b. Variaties
 Het aantal manieren (variates) om 4 elementen op een rijtje te zetten als je die 4 mag kiezen uit 9 verschillende elementen is $9 \times 8 \times 7 \times 6$.
 Rekenapparaat: $9 \text{ nPr } 4$
 - c. Combinaties
 Het aantal manieren (combinaties) om 3 elementen te kiezen uit een verzameling van 10 elementen, ongeacht volgorde van kiezen, is
 Rekenapparaat: $10 \text{ nCr } 3$

Voorbeeld voetbaltoto zoals bedoeld in de opgaven:

Wedstrijd:	1(thuis wint)	2(uit wint)	3(gelijkspel)
1. PSV-de Graafschap		X	
2. Twente-Ajax			X
3. Utrecht-RKC	X		
4. Feyenoord-...	X		
5. -		X	
6.	X		
7.			X
8.			
9.			
10			
11.			
12.			
13.			

Voorbeeld van lotto zoals bedoeld:

Lotto formulier, Kruis 6 van de 41 vakjes aan						
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	

$$\begin{aligned}
 (a+b)^5 &= \binom{5}{0}a^5b^0 + \binom{5}{1}a^4b^1 + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}a^1b^4 + \binom{5}{5}a^0b^5 \\
 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + b^5
 \end{aligned}$$