Oefeningen met complexe getallen

m.laarhoven

ANTWOORDEN

1.

a.

$$z^2 = -1 + i.\sqrt{3} \Rightarrow |z^2| = 2 \,\&\, \arg(z^2) = \frac{2}{3}\pi (\mathrm{mod}\, 2\pi) \Rightarrow |z| = \sqrt{2} \,\&\, \arg(z) = \frac{1}{3}\pi (\mathrm{mod}\, \pi) \Rightarrow$$

$$z = \sqrt{2}.e^{\frac{1}{3}\pi i} \vee z = \sqrt{2}.e^{1\frac{1}{3}\pi i} \Rightarrow z = \sqrt{2}(1+\sqrt{3}.i) \vee z = \sqrt{2}(-1-\sqrt{3}.i)$$

b. $z^4 = 3 \Rightarrow z = \sqrt[4]{3} \vee z = \sqrt[4]{3}.i \vee z = -\sqrt[4]{3} \vee z = -\sqrt[4]{3}.i$

c.

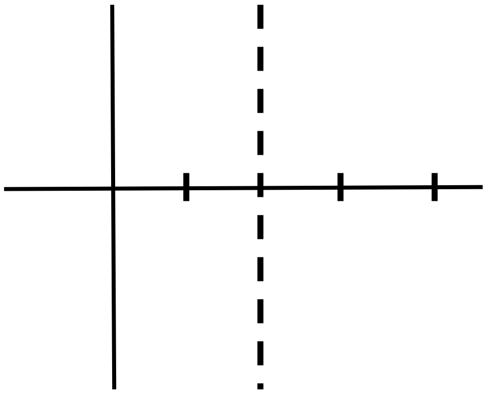
$$z^3 - 6z - 40 = 0 \Rightarrow (z-4)(z^2+4z+10) = 0 \Rightarrow z = 4 \vee (z+2)^2 = -6 \Rightarrow$$

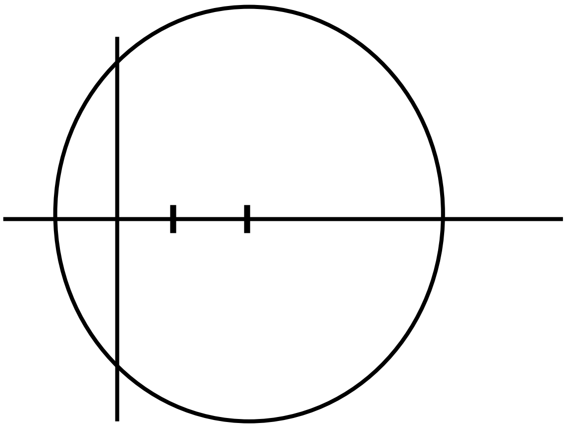
$$z = 4 \vee z+2 = \sqrt{6}.i \vee z+2 = -\sqrt{6}.i \Rightarrow z = 4 \vee z = -2+\sqrt{6}.i \vee z = -2-\sqrt{6}.i$$

2. Teken de getallen z in het complexe vlak die voldoen aan

   a. |z|=|z-4|

   b. |z-2|=3





3. Los op, $z \in \mathbb{C}$:

   a. $\dfrac{z-1}{z} = i \Rightarrow z = \dfrac{1}{1-i}$

   b.

$$z^3 - 11z + 20 = 0 \Rightarrow (z+4)(z^2-4z+5) = 0 \Rightarrow z = -4 \vee (z-2)^2 = -1 \Rightarrow$$

$$z = -4 \vee z-2 = i \vee z-2 = -i \Rightarrow z = -4 \vee z = 2+i \vee z = 2-i$$

c. $z^3+z-10=0 \Rightarrow (z-2)(z^2+2z+5)=0 \Rightarrow z=2 \vee (z+1)^2=-4 \Rightarrow$
$z=2 \vee z=-1+2i \vee z=-1-2i$

d.
$z^2-4z+4+2i=0 \Rightarrow (z-2)^2=-2i \Rightarrow z-2=1-i \vee z-2=-1+i$

$|-2i|=2 \,\&\, \arg(-2i)=-\frac{1}{2}\pi (\mathrm{mod}\, 2\pi) \Rightarrow$

$|\sqrt{-2i}|=\sqrt{2} \,\&\, \arg(\sqrt{-2i})=-\frac{1}{4}\pi \vee \arg(\sqrt{-2i})=\frac{3}{4}\pi \Rightarrow$

$z=\sqrt{2}.e^{-\frac{1}{2}\pi i} \vee z=\sqrt{2}.e^{\frac{3}{2}\pi i} \Rightarrow z=\sqrt{2}(\frac{1}{2}\sqrt{2}-i.\frac{1}{2}\sqrt{2}) \vee z=\sqrt{2}(-\frac{1}{2}\sqrt{2}+i.\frac{1}{2}\sqrt{2})$

e. $z^2+8z+25=0 \Rightarrow (z+4)^2=-9 \Rightarrow z=-4+3i \vee z=-4-3i$

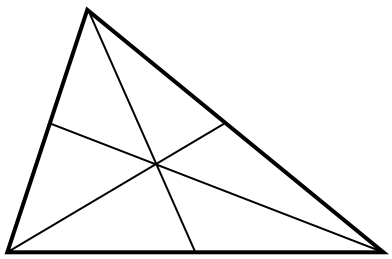
4. $\frac{1}{(1-i)^3}=\frac{1}{(1-i)^3}.\frac{(1+i)^3}{(1+i)^3}=\frac{(1+i)^3}{8}=\frac{(1+i)(2i)}{8}=\frac{2i-2}{8}=\frac{1}{4}i-\frac{1}{4}$

5. $\sqrt{-1}=+i$ en dat is gewoon een gemaakte afspraak.

6. $\frac{2}{1+i}=\frac{2}{1+i}.\frac{1-i}{1-i}=\frac{2-2i}{2}=1-i$ en dat hoort bij een roosterpunt dus is een gehele van Gauss, dus ja 1+i is een deler van 2

7. I$\frac{3-i}{1-i}=\frac{3-i}{1-i}.\frac{1+i}{1+i}=\frac{4+2i}{2}=2+i$ en dat hoort bij een roosterpunt dus is een gehele van Gauss, dus ja 1-i is een deler van 3-i

8.



$P:\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \quad Q:\frac{1}{2}(\beta+\gamma) \quad R:\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$

$AQ:\alpha+t(\frac{1}{2}(\beta+\gamma)-\alpha)$

$BR:\beta+s(\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)-\beta)$

$CP:\gamma+k(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\gamma)$

Voor $t=\frac{2}{3}$ en $s=\frac{2}{3}$ en $k=\frac{2}{3}$ kom je drie keer in $Z=\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)$