1-2 Uitwerking examen wiskunde B 1987-I

2a Uit $x = \dfrac{4t-4}{t^2}$ en $y = t^2 - 1$ volgt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4 \cdot t^2 - (4t-4) \cdot 2t}{t^4} = \frac{-4t+8}{t^3} \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = 2t$$

De raaklijn is evenwijdig aan de y-as als

$\dfrac{dx}{dt} = 0$ en $\dfrac{dy}{dt} \neq 0$

Dit is het geval als $t = 2$. Voor $t = 2$ wordt $x = 1$ en $y = 3$.
Het gevraagde punt is dus $(1, 3)$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn volgt uit:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2t \cdot \frac{t^3}{-4t+8} = \frac{2t^4}{-4t+8}$$

In O geldt $4t - 4 = 0$ en $t^2 - 1 = 0$, dus $t = 1$;
de richtingscoëfficiënt is dan $\frac{1}{2}$.
Een vergelijking van de raaklijn in O aan K is $y = \frac{1}{2}x$.

2b $x = -3$ geeft $\dfrac{4t-4}{t^2} = -3$.

Omdat $t \neq 0$ volgt hieruit $4t - 4 = -3t^2$
Zodat $3t^2 + 4t - 4 = 0$ en $t = -2$ of $t = \frac{2}{3}$.
Invullen levert $y_A = 3$ en $y_B = -\frac{5}{9}$. Dus $AB = 3\frac{5}{9}$.

2c Als $t \to 0$ dan $x \to -\infty$ en $y \to -1$.
Hieruit volgt dat K een horizontale asymptoot $y = -1$ heeft.
Als $t \to \infty$ dan $x \to 0$ en $y \to \infty$.
Dus de verticale asymptoot is $x = 0$.

$y = 0$ geeft $t = -1$ of $t = 1$.
K snijdt de x-as in $(-8, 0)$ en $(0, 0)$.
Uit $y = t^2 - 1$ volgt $t = \pm\sqrt{y+1}$.

Hiermee kun je afleiden dat $x = \dfrac{-4 \pm 4\sqrt{y+1}}{y+1}$.

Bij elke y-waarde, groter dan -1, behoren twee x-waarden.
De kromme bestaat dus uit twee takken.
Met behulp van alle gevonden bijzonderheden kan K worden getekend.
Eventueel nadat nog enkele punten bepaald zijn.
$t = -3$ geeft $(-1{,}78;\ 8)$, $t = 1\frac{1}{2}$: $(0{,}89;\ 1{,}25)$,
$t = \frac{1}{2}$: $(-8;\ -0{,}75)$ en $t = 3$: $(0{,}89;\ 8)$.