1-2 Uitwerking examen wiskunde B 1987-I

1a $f\colon x \to \dfrac{3}{1 + \sin x}$

Oplossing I

1 *Domein* $D_f = [0, 2\pi] \setminus \{1\frac{1}{2}\pi\}$, want $\sin x$ mag niet -1 zijn.

2 *Nulpunten en tekenschema van f*

De teller heeft geen nulpunten; die van de noemer volgen uit: $1 + \sin x = 0$. En dus $\sin x = -1$, zodat $x = 1\frac{1}{2}\pi$.

Het tekenverloop van f staat hiernaast.

3 *Afgeleide functie met tekenschema: extreme waarden*

De afgeleide kun je bepalen met de quotiëntregel:

$$f'(x) = \frac{(1 + \sin x)\cdot 0 - 3\cdot\cos x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-3\cos x}{(1 + \sin x)^2}$$

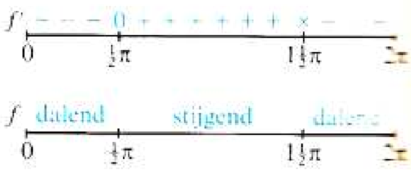
Ook kan het functievoorschrift herschreven worden tot $f(x) = 3(1 + \sin x)^{-1}$. Met de kettingregel kun je vervolgens $f'(x)$ hieruit afleiden.

$f'(x) = 0$ voor $x = \frac{1}{2}\pi$; $x = 1\frac{1}{2}\pi$ behoort niet tot D_f.

Het tekenverloop van f' staat hiernaast.

Let wel Bij $x = 1\frac{1}{2}\pi$ vindt er een tekenwisseling plaats!

f heeft een minimum $f(\frac{1}{2}\pi) = 1\frac{1}{2}$, een randmaximum $f(0) = 3$ en een randminimum $f(2\pi) = 3$.

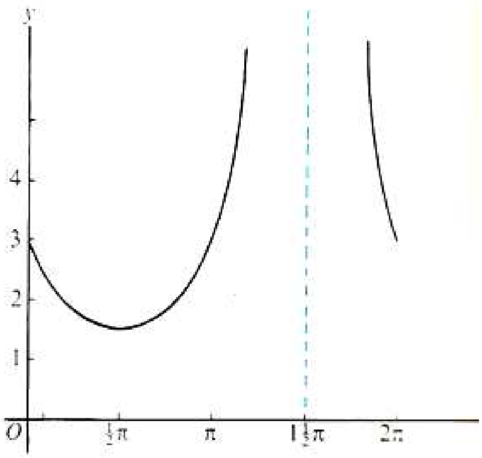


4 *Asymptoten*

f heeft als verticale asymptoot: $x = 1\frac{1}{2}\pi$.

5 *De grafiek van f*

De grafiek van f kan met bovenstaande gegevens getekend worden; eventueel kunnen nog enkele functiewaarden worden berekend; bijvoorbeeld $f(\pi) = 3$, $f(\frac{1}{6}\pi) = f(\frac{5}{6}\pi) = 2$ en $f(1\frac{1}{6}\pi) = f(1\frac{5}{6}\pi) = 6$.

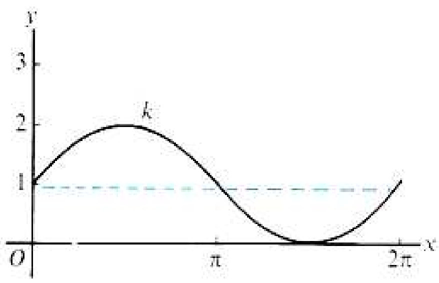


Oplossing II

De grafiek van f kun je als volgt ontstaan denken:
teken de grafiek van $k(x) = 1 + \sin x$. Met behulp hiervan kan de functie $h(x) = \dfrac{1}{k(x)}$ getekend worden.

Er geldt: $h(x) = 1$ als $k(x) = 1$, $h(x) > 0$ als $k(x) > 0$, maximum $k(\frac{1}{2}\pi) = 2$ geeft minimum $h(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}$ en als $k(x) = 0$ dan heeft $h(x)$ een verticale asymptoot: $x = 1\frac{1}{2}\pi$.

De grafiek van f ontstaat door een lijnvermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met factor 3 uit die van h.



→