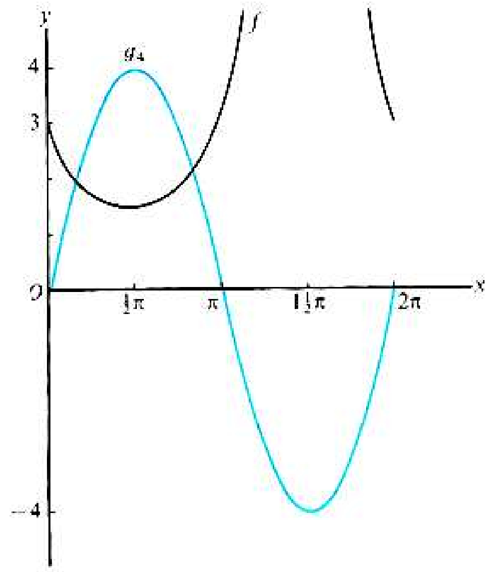
1-2 Uitwerking examen wiskunde B 1987-I

1b $\dfrac{3}{1+\sin x} \geqq 4 \sin x$

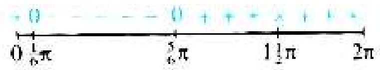


Oplossing I

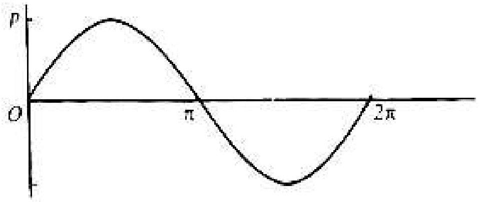
Teken de grafieken van f en g_4 in één figuur.
Bereken de x-coördinaat van de snijpunten door de vergelijking
$\dfrac{3}{1+\sin x} = 4 \sin x$ op te lossen.
De breuk verdrijven: $4\sin^2 x + 4 \sin x - 3 = 0$. Deze kwadratische vergelijking in $\sin x$ kan worden opgelost door ontbinding of met behulp van de wortelformule.
Er blijkt $\sin x = \frac{1}{2}$ en dus $x = \frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi$.
Ook wordt gevonden $\sin x = -1\frac{1}{2}$, maar deze vergelijking heeft geen oplossing.
Uit de figuur is nu de oplossing van de ongelijkheid af te lezen:
$0 \leqq x \leqq \frac{1}{6}\pi$ of $\frac{5}{6}\pi \leqq x < 1\frac{1}{2}\pi$ of $1\frac{1}{2}\pi < x \leqq 2\pi$.

Oplossing II

Op nul herleiden en op een noemer brengen:
$\dfrac{3 - 4 \sin x(1 + \sin x)}{1 + \sin x} \geqq 0$ en daaruit $\dfrac{-4\sin^2 x - 4 \sin x + 3}{1 + \sin x} \geqq 0$
De nulpunten van de teller volgen uit: $4 \sin^2 x + 4 \sin x - 3 = 0$
Deze vergelijking heeft als oplossing – zie hierboven –:
$x = \frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi$.
De noemer heeft als nulpunt $x = 1\frac{1}{2}\pi$.
Uit het tekenschema van de breuk is de oplossing af te lezen.



1c De inhoud is gelijk aan $\int_0^\pi \pi \cdot p^2 \sin^2 x \, dx$



Oplossing I

$\int_0^\pi \pi \cdot p^2 \sin^2 x \, dx = \pi p^2 \int_0^\pi (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x)\, dx =$
$= [\pi p^2 \cdot \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi^2 p^2$
Dus $\frac{1}{2}\pi^2 p^2 = 8$ en daaruit volgt $p = \dfrac{4}{\pi}$ of $p = -\dfrac{4}{\pi}$

Oplossing II

Met behulp van de tekening hiernaast is in te zien, dat voor het interval $[0, \pi]$ geldt, dat $\int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \int_0^\pi \cos^2 x \, dx$ Dus:
$\int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\sin^2 x + \cos^2 x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi dx = [\frac{1}{2}x]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi$
Hiermee kan het gevraagde worden berekend.