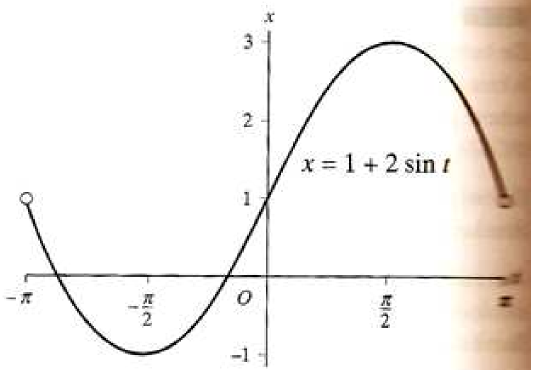
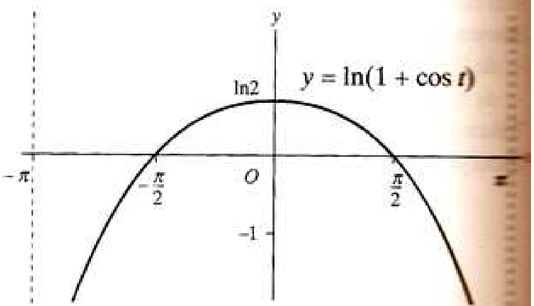
Uitwerking examen wiskunde B 1991-I

Opgave 1

1 De functie $t \to 1 + 2\sin t$ heeft als grafiek een sinusoïde rond de lijn $y = 1$ met maximum 3 voor $t = \frac{\pi}{2}$ en minimum -1 voor $t = -\frac{1}{2}\pi$. Uit de grafiek van x als functie van t is af te lezen, dat x alle waarden in het interval $[-1,\ 3]$ aanneemt.
Voor $y = \ln(1 + \cos t)$ geldt dat $1 + \cos t$ voor $t \in \langle -\pi,\ \pi \rangle$ alle waarden in het interval $\langle 0,\ 2]$ aanneemt, zodat y alle waarden van $\langle \leftarrow,\ \ln 2]$ aanneemt.
Zie, ter illustratie, de grafiek van y als functie van t.



2 Op de x-as is $y = 0$, dus geldt voor $t \in \langle -\pi,\ \pi \rangle$:
$\ln(1 + \cos t) = 0$ dus $\cos t = 0$ zodat $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = -\frac{1}{2}\pi$
Invullen in $x = 1 + 2\sin t$ geeft $x = -1$ of $x = 3$. De gevraagde snijpunten zijn dus $(-1,\ 0)$ en $(3,\ 0)$.
Op de y-as is $x = 0$, dus geldt voor $t \in \langle -\pi,\ \pi \rangle$:
$1 + 2\sin t = 0$, dus $\sin t = -\frac{1}{2}$, zodat $t = -\frac{1}{6}\pi$ of $t = -\frac{5}{6}\pi$
Invullen in $y = \ln(1 + \cos t)$ geeft $y = \ln(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) \approx 0{,}6$
of $y = \ln(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}) \approx -2{,}0$
De gevraagde snijpunten zijn dus $(0,\ -2{,}0)$ en $(0,\ 0{,}6)$.



3 Differentiëren van x en y naar t geeft: $\frac{dx}{dt} = 2\cos t$ en
$\frac{dy}{dt} = \frac{-\sin t}{1 + \cos t}$ In een punt waar de raaklijn aan K evenwijdig met de x-as is geldt dat $\frac{dy}{dt} = 0$ en $\frac{dx}{dt} \neq 0$, dus $\sin t = 0$ of $t = 0$.
Hiermee correspondeert het punt $(1,\ \ln 2)$ van K. In een punt waar de raaklijn aan K evenwijdig met de y-as is, geldt dat
$\frac{dx}{dt} = 0$ en $\frac{dy}{dt} \neq 0$, dus $\cos t = 0$ ofwel $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = -\frac{1}{2}\pi$.
Hiermee corresponderen de punten $(-1,\ 0)$ en $(3,\ 0)$.

4 Om de asymptoten van K te bepalen, hoeft alleen y bekeken te worden, immers alleen y nadert tot $-\infty$, en wel voor $t \uparrow \pi$ en voor $t \downarrow -\pi$. In beide gevallen geldt dat $x \to 1$.
Dus $x = 1$ is de enige asymptoot.
Bij $x = 1$ hoort $t = 0$. Kies $a \in \langle 0,\ \pi \rangle$, dan horen bij $t = a$ en bij $t = -a$ punten van K: P en Q.
Voor de y-coördinaten van P en Q geldt
$y_Q = y(-a) = \ln(1 + \cos(-a)) = \ln(1 + \cos a) = y(a) = y_P$
Voor de x-coördinaten geldt:
$x_Q = x(-a) = 1 + 2\sin(-a) = 1 - 2\sin a$ en
$x_P = x(a) = 1 + 2\sin a$
P en Q liggen dus even ver van lijn $x = 1$, terwijl hun y-coördinaten gelijk zijn. Ze liggen daarom symmetrisch ten opzichte van de lijn $x = 1$.